ВЫРАЖЕНИЕ ЧИСЛА ПОМЕЧЕННЫХ СВЯЗНЫХ ГРАФОВ ЧЕРЕЗ ЧИСЛО ПОМЕЧЕННЫХ БЛОКОВ С ПОМОЩЬЮ МНОГОЧЛЕНОВ РАЗБИЕНИЙ

В.А. Воблый

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация
vitvobl@yandex.ru

Теорема. *Пусть C_n – число помеченных связных графов с n вершинами, B_n – число помеченных блоков с n вершинами, а $Y_k(x_1,...,x_k)$ – многочлен разбиений. Тогда при $n \geq 1$ верна формула*

$$C_n = \frac{1}{n} Y_{n-1}(nB_2,...,nB_n). \tag{1}$$

Доказательство. Введем производящую функцию: $B(z) = \sum\limits_{p=2}^{\infty} B_p \frac{z^p}{p!}$.

В работах [1] и [2] автором было получено соотношение

$$C_n = \frac{(n-1)!}{n} [z^{-1}] \exp(nB'(z)) z^{-n}, \tag{2}$$

где $[z^{-1}]$ – оператор формального вычета [3, С. 25].

Многочлены разбиений (многочлены Белла) $Y_n(x_1,...,x_n)$ могут быть определены с помощью производящей функции [4, с. 174]

$$\exp\Big(\sum_{m=1}^{\infty} x_m \frac{t^m}{m!}\Big) = \sum_{n=0}^{\infty} Y_n(x_1,...,x_n)\frac{t^n}{n!}\,, Y_0 = 1. \tag{3}$$

Для этих многочленов известна формула [4, с. 173]

$$Y_m(x_1,...,x_m) = \sum_{\pi(m)} \frac{m!}{k_1!...k_m!} \Big(\frac{x_1}{1!}\Big)^{k_1} ... \Big(\frac{x_m}{m!}\Big)^{k_m}\,,$$

где суммирование проводится по всем разбиениям $\pi(m)$ числа m:

$k_1 + 2k_2 + ... + mk_m = m, k_i \geq 1, i = 1,...,m$.

Подставляя в (2) выражение для $B'(z)$ с помощью (3) получим

$$C_n = \frac{(n-1)!}{n}[z^{-1}] \exp(n \sum_{p=2}^{\infty} B_p \frac{z^{p-1}}{(p-1)!}) z^{-n} = \frac{(n-1)!}{n}[z^{-1}] \exp(\sum_{m=1}^{\infty} nB_{m+1}\frac{z^m}{m!}) z^{-n} =$$

$$\frac{(n-1)!}{n}[z^{-1}] \sum_{p=0}^{\infty} Y_p(x_1,...,x_p)\frac{z^{p-n}}{p!} = \frac{(n-1)!}{n} Y_{n-1}(x_1,...,x_{n-1}) \frac{1}{(n-1)!} = \frac{1}{n} Y_{n-1}(nB_2,...,nB_n).$$

Здесь $x_m = nB_{m+1}$. Доказательство закончено.

Следствие 1. *Пусть L_n – число помеченных связных графов без мостов с n вершинами, B_n – число помеченных блоков с n вершинами, а $Y_k(x_1,...,x_k)$ – многочлен разбиений. Тогда при $n \geq 3$ верна формула*

$$L_n = \frac{1}{n} Y_{n-1}(0, nB_3,...,nB_n).$$

Доказательство. Так как граф без мостов не имеет блоков, состоящих из одного ребра, то $B_2 = 0$ и из (1) получим утверждение следствия.

Следствие 2. *Пусть E_n – число помеченных эйлеровых графов с n вершинами, $\bar{B}_n$ – число помеченных эйлеровых блоков с n вершинами, а $Y_k(x_1, ..., x_k)$ – многочлен разбиений. Тогда при $n \geq 3$ верна формула*

$$E_n = \frac{1}{n} Y_{n-1}(0, n\bar{B}_3, ..., n\bar{B}_n).$$

Доказательство. Так как эйлеров граф является графом без мостов и, следовательно, не имеет блоков, состоящих из одного ребра, то $B_2 = 0$ и из (1) получим утверждение следствия.

Литература

1. Воблый В. А. *О перечислении помеченных связных графов по числу точек сочленения* // Дискретная математика. 2008. Т. 20. Вып. 1. С. 14–23.

2. Воблый В. А. *Об одной формуле для числа помеченных связных графов* // Дискретный анализ и исследование операций. 2012. Т. 19. №4. С. 48–59.

3. Гульден Я., Джексон Д. *Перечислительная комбинаторика.* М.: Наука, 1990.

4. Риордан Дж. *Комбинаторные тождества.* М., Наука, 1982.